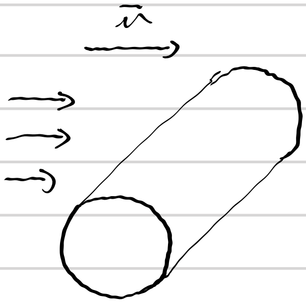
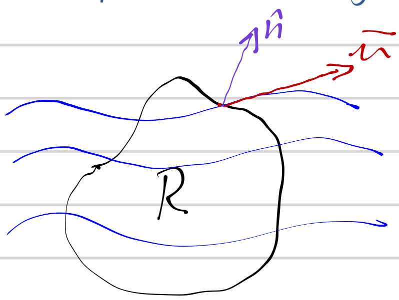
Prúdenie tekutiny okolo valca



- Bude nás zaujímať ustálené prúdenie, t.j. prúdenie nezávislé na čase.
- Hľadáme rýchlosť prúdenia $\bar{u}(x,y,z)$.
- Budeme predpokladať, že prúdenie je v každom zvislom reze (v smere prúdenia) rovnaké, čím problém zredukujeme na dvojrozmerný; $\bar{u}=\bar{u}(x,y)$.

Model prúdenia tekutiny cez dvojrozmernú oblasť



Množstvo (hmotnosť) tekutiny s hustotou $\rho=\rho(x,y,z,t)$ v oblasti R je

$$\iiint_R \rho \, dV$$

Množstvo tekutiny, ktoré prejde hranicou oblasti R za jednotku času je

$$\oiint_{\partial R} \rho(\bar{u}\cdot\hat{n})\,dS = \oiint_{\partial r} (\rho\bar{u})\cdot\hat{n}\,dS$$

Zmena množstva tekutiny v oblasti R za jednotku času je

$$\frac{d}{dt}\iiint_R \rho\,dV = -\oiint_{\partial R}(\rho\bar{u})\cdot\hat{n}\,dS = -\iiint_R \nabla(\rho\bar{u})\,dV$$

Využitím už známeho argumentu dostaneme

$$\iiint_R \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{u})\,dV = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{u}) = 0$$

Ak hustota ρ je konštantná, dostávame rovnicu

$$\nabla\cdot(\rho\bar{u}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\cdot\bar{u} = 0$$

Ďalej pracujme v rovine. Označme zložky rýchlosti $\bar{u}=(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ (prúdenie je ustálené, takže $\bar{u}$, a tým pádom aj u a v, nezávisia od t.). Potom

$$\nabla\cdot\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Stále máme neznáme dve funkcie. Potrebovali by sme však hľadané riešenie reprezentovať jednou reálnou funkciou. Z predošlej rovnice je vidno, že ak $\psi=\psi(x,y)$ je funkcia taká, že

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

tak u a v sú riešenia predošlej rovnice.
Pozrime sa na bližšie na takto reprezentované riešenie. Gradient ψ je

$$\nabla\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y}\right).$$

Potom

$$\vec{u}\cdot\nabla\psi=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0$$

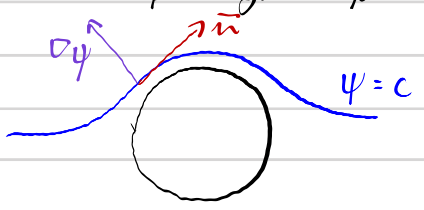
takže gradient ψ je kolmý na rýchlosť $\vec{u}$. Krivky určené rovnicami $\psi(x,y)=c$ nazývame prúdnice.
Rotácia $\vec{u}$ je

$$\nabla\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ u & v & 0\end{vmatrix}=\hat{z}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\hat{z}\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=-\hat{z}\cdot\nabla^2\psi$$

Za predpokladu nerotujúceho toku, $\nabla\times\vec{u}=0$ dostaneme, že ψ je riešením Laplaceovej rovnice

$$\nabla^2\psi=0$$

Funkciu ψ nazývame prúdová (prúdnicová) funkcia.

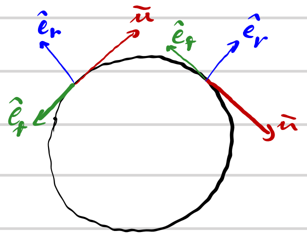


Vráťme sa k pôvodnému problému obtekania valca. Zrejme bude výhodné pracovať v polárnych súradniciach. V karteziánskych súradniciach bolo $\vec{u}=(u,v)$. V polárnych označme súradnicové funkcie $\vec{u}=(u_r,u_\theta)$.
Vieme, že v karteziánskych súradniciach je $u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$ a $v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$.
V polárnych súradniciach potom ($x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$)

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial y}r\cos\theta=u\cdot r\cdot\cos\theta+v\cdot r\cdot\sin\theta=r\cdot u_r\quad\Rightarrow\quad u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\psi}{\partial y}\sin\theta=-v\cos\theta+u\sin\theta=-u_\theta.\quad\Rightarrow\quad u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Hľadáme funkciu ψ, ktorá spĺňa Laplaceovu rovnicu $\nabla\psi = 0$.
Navyše predpokladajme, že ďaleko od valca je ustálené prúdenie konštantné v smere osi x, takže $\vec{u} = (U, 0) \Rightarrow \psi = Uy = U \cdot r \sin\vartheta$ pre $r \to \infty$.
Rýchlosť prúdenia zrejme kopíruje plochu valca, čo sa premietne do podmienky $u_r(a,\vartheta) = 0$ (valec s polomerom podstavy a).



$$u_r(a,\vartheta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}(a,\vartheta) = 0 \Rightarrow \psi(a,\vartheta) = c$$

a môžeme zvoliť $c = 0$. Dostávame tak úlohu

$$\nabla^2\psi = 0$$
$$\psi(a,\vartheta) = 0$$
$$\psi(r,\vartheta) = Ur\sin\vartheta \quad \text{pre } r \to \infty$$

Všeobecné riešenie Laplaceovej rovnice pre doplnok kruhovej oblasti má tvar

$$\psi(r,\vartheta) = c_1 \ln r + c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})\sin n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n + D_n r^{-n})\cos n\vartheta.$$

Z OP.

$$0 = \psi(a,\vartheta) = c_1 \ln a + c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n a^n + B_n a^{-n})\sin n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n a^n + D_n a^{-n})\cos n\vartheta$$

dostávame

$$c_2 + c_1 \ln a = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1 \ln a$$
$$A_n a^n + B_n a^{-n} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_n = -A_n a^{2n}$$
$$C_n a^n + D_n a^{-n} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_n = -C_n a^{2n}$$

Po drobných úpravách získame

$$\psi(r,\vartheta) = c_1 \ln\frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(r^n - \frac{a^{2n}}{r^n}\right)\sin n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(r^n - \frac{a^{2n}}{r^n}\right)\cos n\vartheta$$

Pre $r \to \infty$ máme $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = U\cos\vartheta$. Takže z predošlého tvaru ψ dostaneme

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n\left(r^{n-1} - \frac{a^{2n}}{r^{n+1}}\right)\cos n\vartheta - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n\left(r^{n-1} + \frac{a^{2n}}{r^{n+1}}\right)\sin n\vartheta$$

a teda $C_n = 0$ pre $n \geq 1$, $A_n = 0$ pre $n \geq 2$ a pre $n = 1$ $A_n = U$ $(r \to \infty)$.

Hľadané riešenie je teda

$$\psi(r,\vartheta) = c_1 \ln \frac{r}{a} + U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\vartheta$$

Z toho vieme získať $u_\vartheta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$

$$u_\vartheta = -\frac{c_1}{r} - U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\vartheta$$

Definujme cirkuláciu

$$\int_0^{2\pi} u_\vartheta r \, d\vartheta = -2\pi c_1$$

Tlak p tekutiny vytvára silu v smere proti vonkajšej normále k valcu $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Potom odporová sila a vztlak sú

$$F = (F_x, F_y) = -\int_0^{2\pi} p \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, a \, d\vartheta.$$

Pre ustálené toky platí Bernoulliho podmienka

$$p + \frac{1}{2}\rho|\bar{u}|^2 = C$$

Na valci $u_r = 0$, takže $|\bar{u}|^2 = u_\vartheta^2$. Potom

$$F_x = -\int_0^{2\pi} p \cdot \cos\vartheta \, a \, d\vartheta = -\int_0^{2\pi} \left(C - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{c_1}{a} + 2U\sin\vartheta\right)^2\right)\cos\vartheta \, d\vartheta = \dots$$

$$F_y = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} \left[-\frac{c_1}{r} - U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\vartheta\right]^2 \sin\vartheta \, a \, d\vartheta$$

$$= \rho \frac{c_1}{a} U 2 \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta \, a \, d\vartheta = \rho 2\pi c_1 U$$